JOHANN WOLFGANG GOETHE
UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN

www.uni-frankfurt.de

Adaptive Modellierung und Simulation

Kapitel 3: Wissensbasierte Modellierung

Rüdiger Brause

Wissensbasierte Modellierung

Einführung

Module und Subsysteme

Grundelemente

Nichtlineare Systeme

Gleichgewichtssysteme

Parameterschätzung

Wissenbasierte Modellierung - Ideen

- **Beispiel Antarktis: Eisbildung und Sonneneinstrahlung**
  - *Albedo* = Rückstrahlvermögen = Rückstrahlenergie/Einstrahlenergie
  - Temperatur ↑ ⇒ Eisfläche ↓,
    Temperatur ↓ ⇒ Eisfläche ↑
  - Albeido ↑ ⇒ Energieabsorption ↓,
    Albeido ↓ ⇒ Energieabsorption ↑
  - Energieabsorption ↓ ⇒ Temperatur ↓,
    Energieabsorption ↑ ⇒ Temperatur ↑

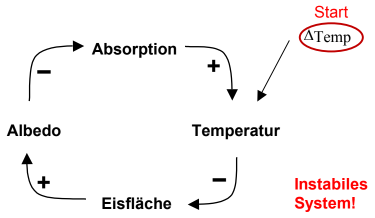
Wissenbasierte Modellierung - Ideen

- Regelbasierte Formulierung

WENN wächst_Eisfläche(t)	DANN wächst_Albedo(t)
WENN sinkt_Eisfläche(t)	DANN sinkt_Albedo(t)
WENN wächst_Temperatur(t)	DANN sinkt_Eisfläche(t)
WENN sinkt_Temperatur(t)	DANN wächst_Eisfläche(t)
WENN wächst_Albedo(t)	DANN sinkt_Absorption(t)
WENN sinkt _Albedo(t)	DANN wächst _Absorption(t)
WENN sinkt_Absorption(t)	DANN sinkt_Temperatur(t)
WENN wächst_Absorption(t)	DANN wächst_Temperatur(t)

Wissenbasierte Modellierung - Ideen

- Graph-basierte Formulierung



Start

ΔTemp

Absorption

–

\+

Albedo

Temperatur

\+

–

Eisfläche

Instabiles System!

Frage: **Warum keine Instabilität in der Realität?**

Weltmodellierung

- **Begriffe und Einflüsse**

1. **Bevölkerung**
2. **Umwelt- und Ressourcenbelastung**
3. **Konsum pro Kopf = Spezif. mater. Verbrauch pro Kopf**
4. **Versorgung**
5. **Gesellschaftliche Kosten**
6. **Gesellschaftliches Handeln**

Modellierung mit Wirkungsbeziehungen

(1) WENN die Bevölkerungszahl wächst, DANN wächst auch die Umwelt- und Ressourcenbelastung.

(2) WENN die Umwelt- und Ressourcenbelastung wächst, DANN wächst auch der spezifische materielle Verbrauch pro Kopf.

(3) WENN der spezifische Konsum pro Kopf wächst, DANN wächst auch die Umwelt- und Ressourcenbelastung.

(4) WENN der spezifische Konsum pro Kopf wächst (und damit die materiellen Bedingungen sich verbessern), DANN wächst die Versorgung

(5) WENN die Versorgung wächst, DANN wächst auch die Bevölkerungszahl.

(6) WENN die Umwelt- und Ressourcenbelastung wächst, DANN vermindert sich die Bevölkerungszahl.

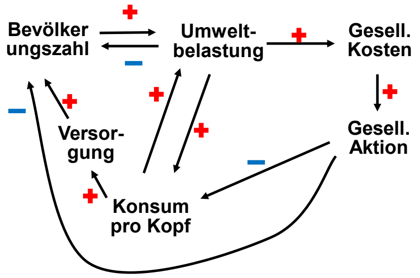
(7) WENN die Umwelt- und Ressourcenbelastung wächst, DANN wachsen auch die gesellschaftlichen Kosten.

(8) WENN die gesellschaftlichen Kosten wachsen, DANN wird auch das gesellschaftliche Handeln zunehmen.

(9) WENN gesellschaftliches Handeln erfolgt, DANN wird bei zu starkem Bevölkerungswachstum durch geeignete Maßnahmen dieses reduzieren.

(10)WENN gesellschaftliches Handeln erfolgt, DANN wird bei zu hohem spezifischen materiellen Verbrauch pro Kopf diesen reduzieren.

Modellierung mit Systemgraphen



Bevölker ungszahl

Umwelt-belastung

Gesell. Kosten

Versor-gung

Gesell. Aktion

Konsum pro Kopf

Modellierung mit Systemgraphen

- **Randbedingungen:**
  - Nur **direkte** Einflüsse werden modelliert mit Pfeilen: A →B, B → C, aber nicht A → C
  - Alle anderen Beziehungen sind dabei „**eingefroren**“ (Sensitivitätsanalyse, kleine Störung)
  - Entstandene Graph gilt nur innerhalb eines Kontextes, z.B. die Ausgangssituation

Modellierung - Systemdiagramm

Vorarbeiten:

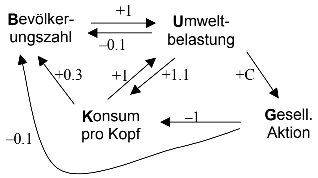
- Unwirksame Knoten entfernen
  z.B. „Resignation“ hat keine Senke
- Nicht beeinflussbarer Kontext kann weggelassen werden
  z.B. die Quelle „Katastrophe“
- Übergangsknoten (**Unkritisches Element**) kann weggelassen werden, wenn die Wirkung mit Folgeknoten zusammengefasst werden kann, z.B. (*Gesell. Kosten, Gesell.Aktion)* sowie *(Konsum, Versorgung)*
- Wirkungen werden mit **Gewichten** versehen

➲ **Gewichteter und gerichteter Graph.**

➲ **Adjazenzmatrix = Systemmatrix**

Modellierung mit Systemgraphen

Das **Wirkdiagramm**



- gerichteter Graph
- gewichteter Graph

Die **Systemmatrix**

Wirkung von

Wirkung auf

	B	U	K	G
B	0	-0.1	0.3	-0.1
U	1.0	0	1.0	0.0
K	0.0	1.1	0	-1.0
G	0.0	C	0.0	0

Modellierung mit Systemgraphen

Wichtige Systemgrößen

Aktive/passive Knoten, z.B. U:
S_i / Z_i = max

= (0.1+1.1+0.3) /2 = 0.75

Aktivster Knoten = ?

Kritische/puffernde Knoten:
beeinflussen viel, werden viel beeinflusst.
$S_i \cdot Z_i$ = max

Wirkung von

		B	U	K	G	
	B	0	-0.1	0.3	-0.1	
Z_i	**U**	1.0	0	1.0	0.0	$\sum_j \lvert A_{ij} \rvert$
	K	0.0	1.1	0	-1.0	
	G	0.0	C	0.0	0	
			S_i			
			$\sum_j \lvert A_{ji} \rvert$			

Modellierung mit Systemgraphen

- **Wirkungsarten t → t+1**
  - **Absolute** Veränderung:

    Zustandsdynamik $z_i(t+1) = z_i(t) + \sum_{\text{alle Vorgänger}} w_j z_j$

  - **Relative** Veränderung:

    Pulsfortpflanzung $z_i(t+1) = z_i(t) + \sum_{\text{alle Vorgänger}} w_j \Delta z_j$

Auswirkungen der Gewichte sind sehr verschieden, je nach Interpretation !

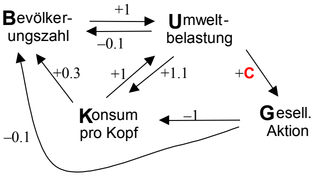
Modellierung mit Systemgraphen

- **Stabilität**

Rückkopplung ?

6 Zyklen möglich!

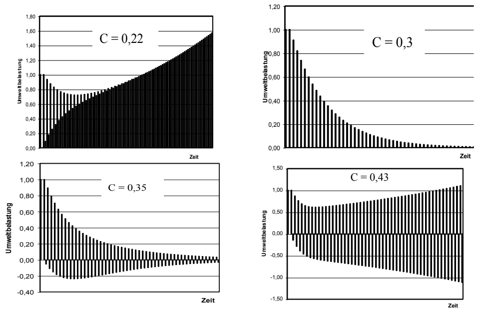
B,U,B
B,U,G,B
B,U,K,B
B,U,G,K,B
U,K,U
U,G,K,U



Dynamik ist abhängig von Kontrollparameter **C**

Das Mini-Weltsystem

- Systemverhalten Pulspropagierung



Das Mini-Weltsystem

- **Wann ist das System stabil ?**

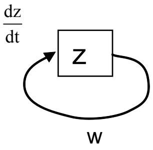
Rechnung:

Pulsmodell, Zustandsmodell.

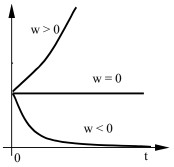
Das Mini-Weltsystem

- **Wann ist das System stabil ?**
- **Lösung:**

  direkte Rückkopplung mit Exponentialfunktion.



$z(t) = z(0)\ e^{wt}$



Das Mini-Weltsystem

- **Elimination von Hilfsgrössen ohne Gedächtnis**

  Beispiel: G(t) = 0

- **Bildung der differentiellen Form**

  z(t+1) - z(t) = Az , $\Delta t = 1$

  z‘ ≈ Δz/Δt = Az *kleine Zeitschritte*

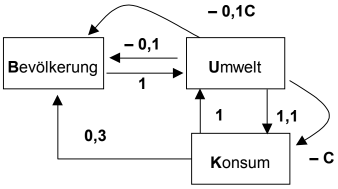
  so dass

  z(t+1) = z(t) + z‘Δt ***Euler-Cauchy-Integration***

- **Visualisierung durch den Wirkgraphen mittels Blöcken**

Das Mini-Weltsystem

- **Systemverhalten Pulsdynamik**



Systemmodellierung

Simulation von Zustandsmodellen

- **Gegeben: Differentialgleichungen.**
- **Gesucht: zeitl. Funktion zum Darstellen.**
- **Lösung: numerische Integration**

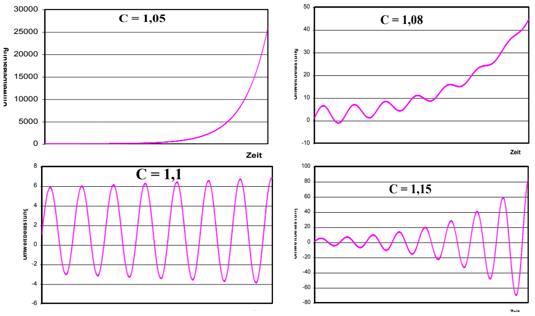
Mittelwertsatz: ex. t_0 mit $\frac{d\mathbf{z}(t_0)}{dt} = \frac{\mathbf{z}(t+\Delta t)-\mathbf{z}(t)}{\Delta t}$

so dass $z(t+\Delta t) \approx z(t) + \frac{dz(t)}{dt}\Delta t$ ***Euler-Cauchy-Integration***

Also: $z(t+\Delta t) := z(t) + Az(t)\,\Delta t$ ***lineares System***

Das Mini-Weltsystem

- Simulation Zustandsmodell



Wissensbasierte Modellierung

Einführung

Module und Subsysteme

Grundelemente

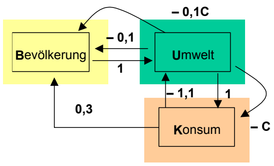
Nichtlineare Systeme

Gleichgewichtssysteme

Parameterschätzung

Modellierung: Erweitertes Weltmodell

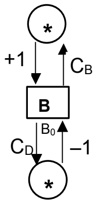
- **Problem: Komplexes Gesamtsystem**
- **Lösung:**
  - Unterteilung in Subsysteme
  - Einzelmodellierung der Subsysteme



Subsystem 1: Bevölkerungsentwicklung

- **Modellierung der Geburten und Sterbefälle**

Geburten und Sterbefälle pro Jahr ~ Bevölkerungsgröße

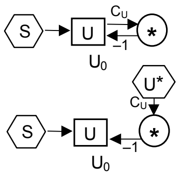


$$\frac{dB}{dt} = +1 \cdot C_B \cdot B$$

$$\frac{dB}{dt} = -1 \cdot C_D \cdot B$$

Subsystem 2: Umweltbelastung

- **Modellierung des Abbaus über die Zeit**
  - Abbau pro Zeit ~ Umweltbelastungsgröße
  - Konstante Belastungsvorgabe S von außen
  - System wird schlechter bei Überlast

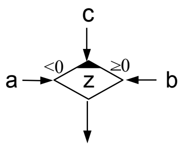


$$\frac{dU}{dt} = S – C_U U \quad \text{bei } U < U^*$$

$$\frac{dU}{dt} = S – C_U U^* \qquad U \geq U^*$$

Subsystem 2: Umweltbelastung

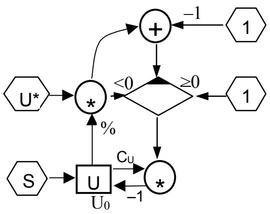
- **Visualisierung der Entscheidung**
  - Definition eines Umschaltelements



If c < 0 THEN z := a
ELSE z := b

Subsystem 2: Umweltbelastung

- **Visualisierung der Entscheidung**
  - Benutzung eines Umschaltelements



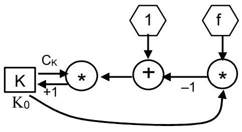
$$\frac{dU}{dt} = S – C_U U \quad \textit{bei } Q > 1,$$

sonst

$$\frac{dU}{dt} = S – C_U UQ = S – C_U U\frac{U^*}{U}$$

Subsystem 3: Konsumentwicklung

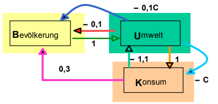
- **Modellierung des Konsums**
  - Konsum hat eine endliche Grenze K*
  - Konsumerhöhung wird schwieriger, je dichter an der Grenze
    dK/dt ~ (1-K/K*)

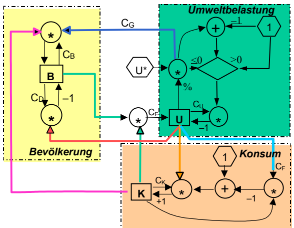


$$\frac{dK}{dt} = C_K\, K\, (1 - \frac{K}{K^*})$$
$$= C_K\, K\, (1 - f\, K)$$

Mini-Weltmodell: Gesamtsystem

- **Verknüpfungen**
  - Umweltschäden erhöhen Sterberate
  - Umweltschäden erzwingen Geburtenkontrolle
  - Bevölkerungsgröße und Konsum bewirken Umweltschäden
  - Umweltbelastung provoziert med. Konsum
  - Konsum erhöht Lebenserwartung
  - Mehr Umweltverschmutzung möglich

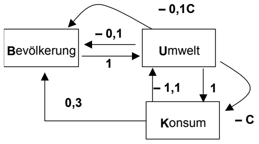


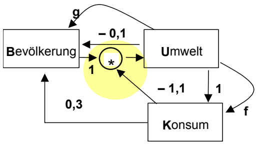


Das Mini-Weltsystem

Übersichtssystem

Gesamtsystem aus Modulen





Äquivalenz durch Linearisierung

Addition statt Multiplikation bei B=K=1

$(1+\Delta B)(1+\Delta K) = 1 + \Delta B + \Delta K + \ldots\ \varepsilon$

Das Mini-Weltsystem

Übersichtssystem

$$\frac{dB}{dt} = (C_B - C_D)B$$

$$\frac{dU}{dt} = S - C_U U \quad \text{bei } U < U^*$$

sonst

$$\frac{dU}{dt} = S - C_U U^* \quad U \geq U^*$$

$$\frac{dK}{dt} = C_K K (1 - \frac{K}{K^*})$$

Modulsystem

$$\frac{dB}{dt} = C_B B K C_G \frac{U^*}{U} - C_D B U$$

$$\frac{dU}{dt} = C_E BK - C_U U \text{ bei } U < U^*,$$

sonst

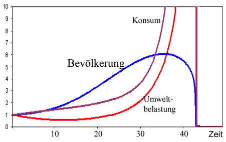
$$\frac{dU}{dt} = C_E BK - C_U U^*$$

$$\frac{dK}{dt} = U C_K K (1 - U C_F \cdot K)$$

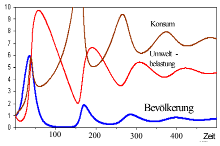
$$\text{mit } C_F = 1/K^*$$

Das Mini-Weltsystem

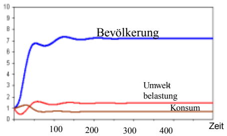
Simulation des Systems: Konsumkontrolle



Keine Kontrolle C_F = 0.0



geringe Kontrolle C_F = 0.03



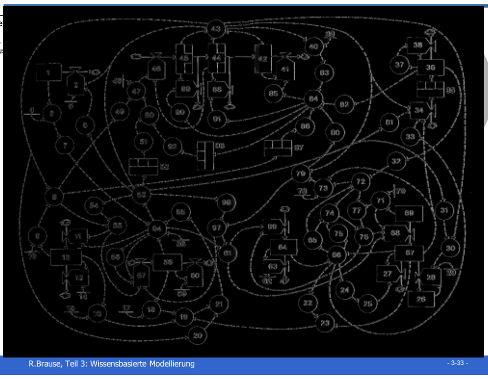
starke Kontrolle

C_F = 1.0

Das Weltmodell von Meadows 1972

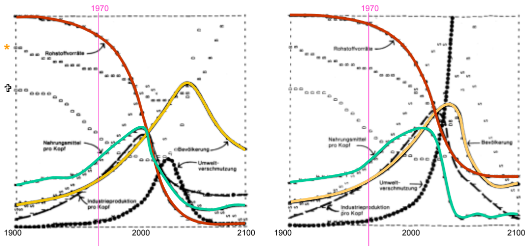
Reale

Einflu



Das Weltmodell von Meadows 1972

- **Simulationsergebnisse**



Einfache Ressourcen

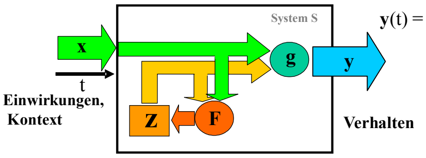
Doppelte Ressourcen

Wissensbasierte Modellierung

- Einführung
- Module und Subsysteme
- **Grundelemente**
- Nichtlineare Systeme
- Gleichgewichtssysteme
- Parameterschätzung

Grundelemente

- **Eingabevariable** $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$
- **Zustandsvariable** $\mathbf{z}(t) = (z_1(t), \ldots, z_m(t))^T$
- **Ausgabevariable** $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))^T$



$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{z}(t),\mathbf{x}(t),t)$

$\mathbf{z}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{z}(t),\mathbf{x}(t),t)$ $\quad \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{f}\,(\mathbf{z}(t),\mathbf{x}(t),t)$

Grundelemente

Simulationsalgorithmus

```
Vorgabe des **Kontextrahmens**:
Alle Anfangswerte $\mathbf{z}(t_0)$, alle festen Parameterwerte
WHILE  $t < t_{max}$  DO
    ◆ Ermittlung der Eingabe und zeitabh. Kontextes $\mathbf{x}(t)$
    ◆ Berechnung der Veränderungsraten      $\mathbf{z}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{z},\mathbf{x},t)$
    ◆ Integration der Raten (neuer Zustand)  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(t_0) + \int_0^t \mathbf{z}'(t')dt'$
    ◆ Berechnung der Ausgabe                 $\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{z},\mathbf{x},t)$
ENDWHILE
```

Grundelemente

Zustände

- Systemverhalten: **Eingabe x** & **Zustände z** reichen aus
- Zustandszahl *m* = „**Dimension**" des Systems
- Erkennen von Zuständen: Sie sind „**träge**"
- Zustände modellieren **Speichergrößen** des Systems wie *Energie*, *Masse*, *Information*, *Populationen*
- sowie **träge Variable** wie *Förderbänder*, *Warteschlangen* oder *Transportverzögerungen*

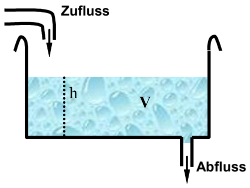
Grundelemente

Zustände

- Die Wahl der Zustandsvariable ist nicht eindeutig !

Beispiel: Speicherbecken

Breite *b*, Länge *g*



Mögliche Zustandsvariable:

Höhe *h*,

Volumen V = h·b·g

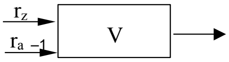
Wassermasse M = aV = a·h·b·g

Eine davon reicht: Dimension **m=1**

Grundelemente

Zustandsänderung des Speichers

- konstante Zuflussrate r_Z
- konstante Abflussrate r_a



$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} = r_Z - r_a$$

Integration

$V(t) = V_0 + (r_z - r_a)\,t = V_0 + V_z(t) - V_a(t)$

Systemverhalten

$V_z(t) - V_a(t) > 0$ *Speicher läuft über*
$V_z(t) - V_a(t) < 0$ *Speicher wird leer*

Grundelemente

Normierung der Zustandsvariablen

Beispiel: ***kinet. Energie***

- Je größer die Masse *m*, umso größer die kinetische Energie E
- Je größer die Geschwindigkeit *v*, umso größer die kinetische Energie E

Mögliche Modellierung: $E \sim m,\ E \sim v \ \Rightarrow\ E \sim m \cdot v$

Aber: Einheiten sind E: [Joule]= [kg·m²/s²], m:[kg], v:[m/s]

E [kg·m²/s²] ≠ [kg·m/s] m·v

Besser ist die Interpretation

E ~ m·v² [kg·m²/s²] ***Test auf Konsistenz***

Grundelemente

Normierung der Zustandsvariablen

Besser: *Normierung auf dimensionslose Größen*

z.B. Volumen:

Aus $V(t) = V_0 + V_z(t) - V_a(t)$ [m³]
mit $U(t) = V(t)/V(0)$
wird $U(t) = 1 + U_z(t) - U_a(t)$ **dimensionslos**

z.B. Zeit

Aus $\mathbf{z}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{z}(t),\mathbf{x}(t),t)$

mit $\tau = t/T$, $u(t) = z(t)/z(0)$

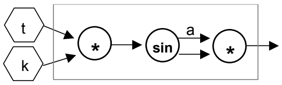
wird $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{F}(\mathbf{u}(\tau),\mathbf{x}(\tau), \tau T)$ **dimensionslos**

Grundelemente

- **Systeme ohne Zustandsvariablen**

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t),t)$$

Beispiel: y = a $\sin^2(kt)$

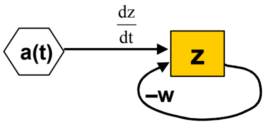


Grundelemente

- **Systeme mit einer Zustandsvariablen**

$z'(t) = w \cdot z(t)$ *exponentielles Wachstum*

$z'(t) = a(t) - w \cdot z(t)$ *exponentielle Verzögerung*



Grundelemente

- **Systeme mit einer Zustandsvariablen**

Beispiel: Speicherbecken

Annahme:

Abfluss des Wassers aus dem Speicherbecken
(d.h. dV_a/dt)
wird mit sinkender Wasserhöhe *h*
durch den Druckabfall p ~ h
auch proportional geringer.

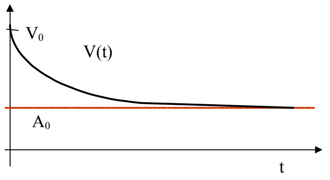
Rechnung: Systemverhalten

Grundelemente

- **Systeme mit einer Zustandsvariablen**

Lösung: Speicherbecken

$$V(t) = A_0 + (V_0 – A_0)\, e^{-(t-t_0)/T}$$



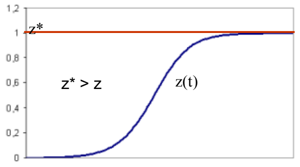
Grundelemente

- **Systeme mit einer Zustandsvariablen**

Beispiel: Konsumentwicklung bei max. Konsum z*

$z'(t) = az(z^* – z)$ *unnormiertes logistisches Wachstum*

$z'(t) = az(1 – bz)$ mit $b = 1/z^*$ *normiertes logist. Wachstum*



Grundelemente

- **Systeme mit zwei Zustandsvariablen**

	z.B.	**Lösung: Ableitung**
$u' = f(u,v)$	$u' = v$	$u'' = v' = –a \cdot u$
$v' = g(u,v)$	$v' = –a \cdot u$	$v'' = –a \cdot u' = –a \cdot v$
		Typ x'' = –ax

Lösung: $x(t) = A \sin(\varphi + \omega t)$ *Oszillationen*

$\Rightarrow x' = A\omega \cos(\varphi + \omega t)$,

$\Rightarrow x'' = –A\omega^2 \sin(\varphi + \omega t) = –\omega^2 \cdot x$

Exp.Dämpfung durch $v' = –b \cdot v$

Grundelemente

- **Systeme mit zwei Zustandsvariablen**

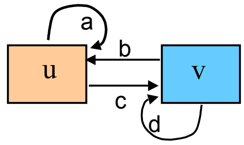
	z.B.	**Mit Dämpfung**
u' = f(u,v)	u' = v	u' = v
v' = g(u,v)	v' = –a·u	v' = –a·u –b·v

Allgemein

u' = a·u + b·v

v' = c·u + d·v

Systemgraph



Grundelemente

- **Systeme mit zwei Zustandsvariablen**

Allgemein	**Lineares System**
u' = f(u,v)	u' = a·u + b·v
v' = g(u,v)	v' = c·u + d·v
z' = A z	*Lineares System*

Stabiles System ?

Grundelemente

- **lineare Systeme**

  z' = A z *Lineares System*

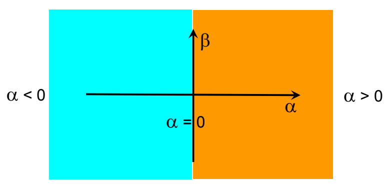
Lösung: $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}_0 e^{\lambda t}$ mit $\lambda = r + i\omega$.

Euler-Form: $e^{\lambda t} = e^{(r + i\omega)} = e^{rt} e^{i\omega t} = e^{rt} (\cos \omega t + i \sin \omega t)$

- Re(λ) < 0 : stabil;
- λ komplex : Oszillationen

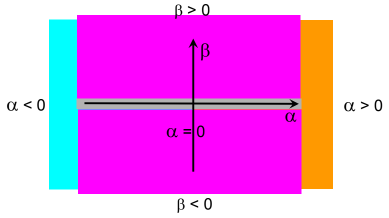
Lineares System

- **Systemverhalten** $\lambda_{1,2} = \left(\frac{p}{2}\right) \pm i \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2} = \alpha \pm i\beta$



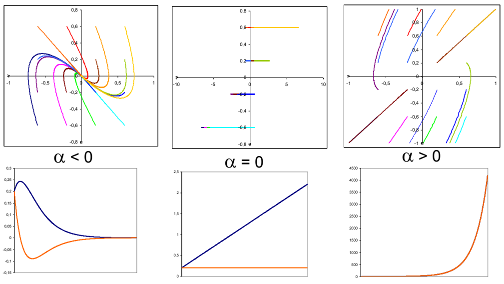
Lineares System

- **Systemverhalten** $\lambda_{1,2} = \left(\frac{p}{2}\right) \pm i \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2} = \alpha \pm i\beta$



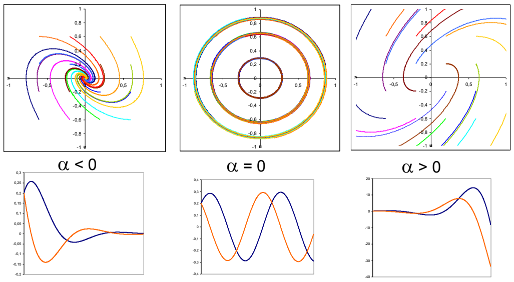
Lineares System

- **Systemverhalten** $\lambda_{1,2} = \left(\frac{p}{2}\right) \pm i \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2} = \alpha \pm i\beta$ **β = 0**



Lineares System

- **Systemverhalten** $\lambda_{1,2} = \left(\frac{p}{2}\right) \pm i\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2} = \alpha \pm i\beta$ $\beta > 0$



$\alpha < 0$ $\alpha = 0$ $\alpha > 0$

Wissensbasierte Modellierung

Einführung

Module und Subsysteme

Grundelemente

Nichtlineare Systeme

Gleichgewichtssysteme

Parameterschätzung

Nichtlineare Kopplung

Beispiel: Populationsdynamik

Population mit Anzahl N_1
Population mit Anzahl N_2

Einfachster Fall: feste Geburt- und Todesraten.

$$\frac{dN_1}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1)\, N_1$$

$$\frac{dN_2}{dt} = (\alpha_2 - \beta_2)\, N_2$$

Nichtlineare Kopplung

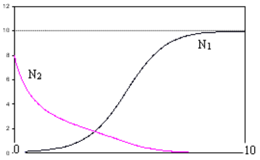
Beispiel: Populationsdynamik

Kopplung: Futterkonkurrenz

$\beta_i = \gamma_i + c_i\,(N_1+N_2)$ i = 1,2 ***Sterberate***

$$\frac{dN_1}{dt} = (\alpha_1 - \gamma_i - c_1\,(N_1+N_2)\,)N_1$$

$$\frac{dN_2}{dt} = (\alpha_2 - \gamma_i - c_2\,(N_1+N_2)\,)N_2$$



Nichtlineare Kopplung

Beispiel: Populationsdynamik

Kopplung: Räuber-Beute

$\beta_1 = \gamma_1 - c_1N_2$ ***Fressen von Spezies 2***
$\beta_2 = \gamma_2 + c_2N_1$ ***Gefressen werden von Spezies 1***

$$\frac{dN_1}{dt} = (\alpha_1 - \gamma_1 + c_1N_2)N_1 \quad = a_1N_1 + c_1N_1N_2 \qquad \textit{Räuber}$$

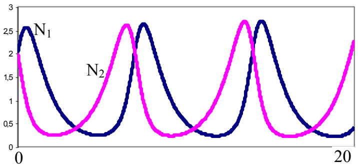
$$\frac{dN_2}{dt} = (\alpha_2 - \gamma_2 - c_2\,N_1)N_2 \quad = a_2N_2 - c_2N_1N_2 \qquad \textit{Beute}$$

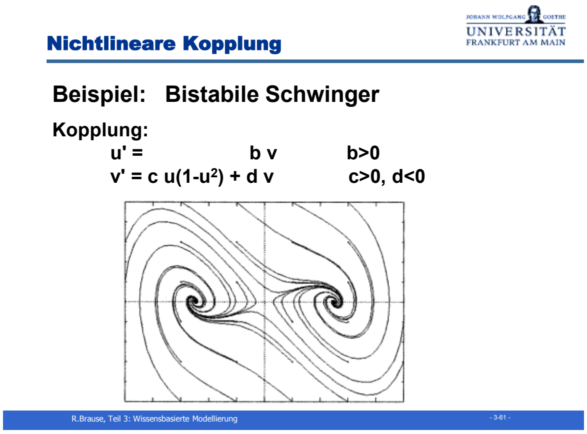
Nichtlineare Kopplung

Beispiel: Populationsdynamik

Kopplung: Räuber-Beute

$\beta_1 = \gamma_1 - c_1N_2$ ***Fressen von Spezies 2***
$\beta_2 = \gamma_2 + c_2N_1$ ***Gefressen werden von Spezies 1***





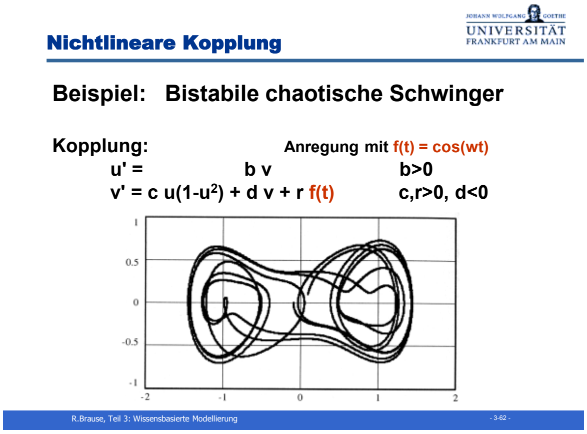
Nichtlineare Kopplung

Beispiel: Bistabile Schwinger

Kopplung:

$u' = b\,v$ b>0

$v' = c\,u(1-u^2) + d\,v$ c>0, d<0



Nichtlineare Kopplung

Beispiel: Bistabile chaotische Schwinger

Kopplung: Anregung mit $f(t) = \cos(wt)$

$u' = b\,v$ b>0

$v' = c\,u(1-u^2) + d\,v + r\,f(t)$ c,r>0, d<0

Nichtlineare Kopplung

Aktivator-Inhibitor-Dynamik

- Beispiel: Muschelzeichnung

Aktivator-Inhibitor-Dynamik

- **Stabilisierung eines Aktivators durch Inhibition**

Aktivator
u' = u (u – 1)

Autokatalyse:
bei u<1 ist u'<0,
bei u>1 ist u'>0

Inhibitor

v' = u^2 – v *Gleichgewicht* bei u^2=1

Kopplung Inhibitor-Aktivator

u' = u (u/v – 1) = u^2/v – u

v' = u^2 – v

Aktivator-Inhibitor-Dynamik

- **Stabilisierung eines Aktivators durch Inhibition**

Zellwechselwirkung:
Änderung der örtlichen Änderung nötig!

Aktivator

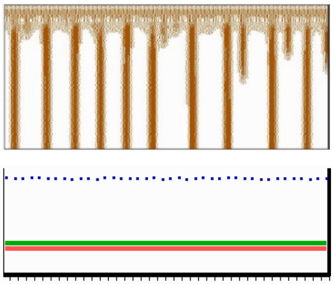
$$u' = b_u + s \cdot u^2/v - r_u u + c_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Inhibitor

$$v' = b_v + s \cdot u^2 \quad - r_v v + c_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Aktivator-Inhibitor-Dynamik

- **Stabilisierung eines Aktivators durch Inhibition**



Aktivitäts-Hemmungs-Dynamik

- Stabilisierung eines Aktivators durch Substratabbau

$$u' = b_u + s \cdot u^{*2} v - r_u u + c_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ **Aktivator**

$$v' = b_v - s \cdot u^{*2} v - r_v v + c_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$ **Substrat**

mit Sättigung $u^{*2} = \frac{u^2}{1 + s_u u^2}$

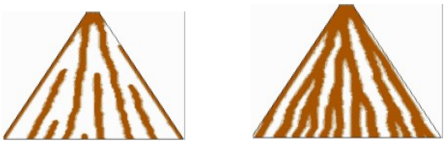
Aktivitäts-Hemmungs-Dynamik

- Stabilisierung des Aktivators beim Wachstum

Aktivitäts-Hemmungs-Dynamik

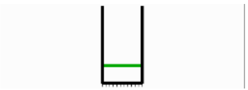
- Stabilisierung des Aktivators beim Wachstum

Biologische Pigmentierungs-Erscheinungsformen



Dynamik-Simulation

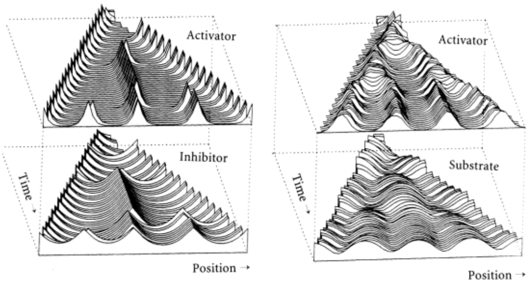
Aktivator-Inhibitor



Aktivator-Substrat

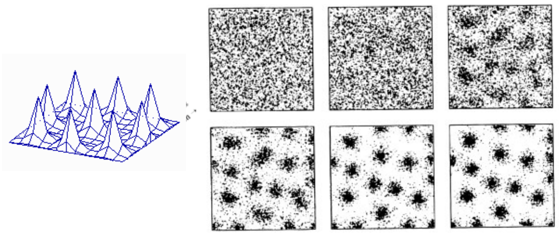
Aktivitäts-Hemmungs-Dynamik

- Vergleich der Stabilisierungsarten beim Wachstum



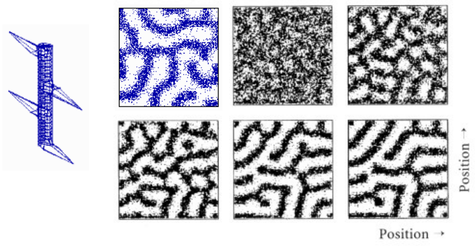
Aktivitäts-Hemmungs-Dynamik

- 2-dimensionale Erweiterung: geringe Inhibitorreichweite



Aktivitäts-Hemmungs-Dynamik

- 2-dimensionale Erweiterung: starke Inhibitordiffusion



Wissensbasierte Modellierung

Einführung

Module und Subsysteme

Grundelemente

Nichtlineare Systeme

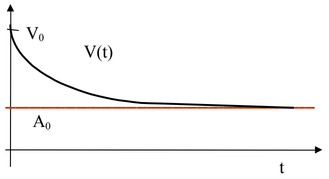
Gleichgewichtssysteme

Parameterschätzung

Dynamik des Speichers

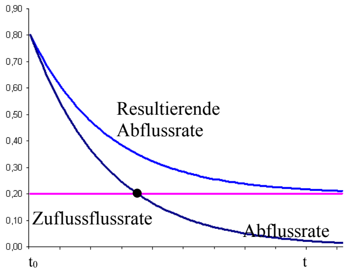
Gleichgewicht in der Badewanne

$$V(t) = A_0 + (V_0 – A_0)\, e^{-(t-t_0)/T}$$



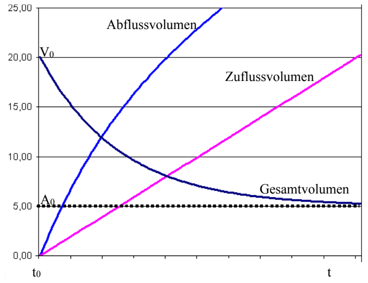
Dynamik des Speichers

Gleichgewicht in der Badewanne



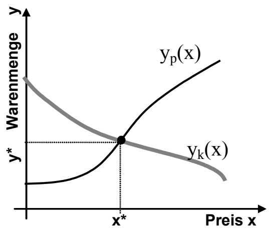
Dynamik des Speichers

Gleichgewicht in der Badewanne



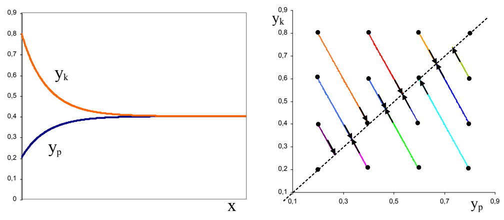
Gleichgewichtsmodellierung

- Waren-Preisgleichgewicht



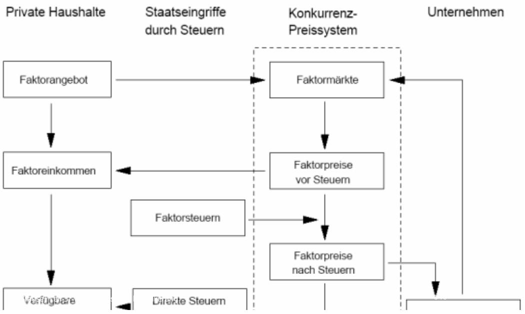
Gleichgewichtsmodellierung

- Waren-Preis-Dynamik



Gleichgewichtsmodellierung

- **Steuerpolitik**



Private Haushalte

Staatseingriffe durch Steuern

Konkurrenz-Preissystem

Unternehmen

Faktorangebot

Faktormärkte

Faktoreinkommen

Faktorpreise vor Steuern

Faktorsteuern

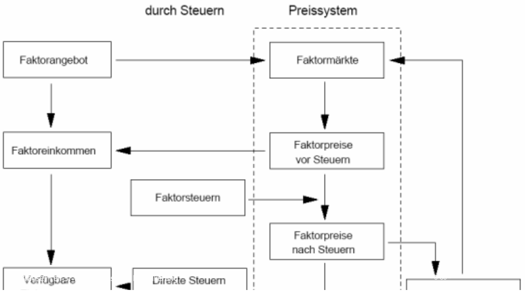
Faktorpreise nach Steuern

Verfügbare

Direkte Steuern

Gleichgewichtsmodellierung

- **Steuerpolitik** *(Inst.f.Arbeitsmarkt und Berufsforschung)*



Private Haushalte

Staatseingriffe durch Steuern

Konkurrenz-Preissystem

Unternehmen

Faktorangebot

Faktormärkte

Faktoreinkommen

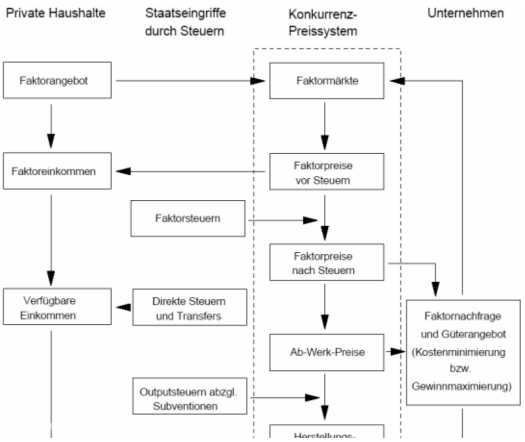
Faktorpreise vor Steuern

Faktorsteuern

Faktorpreise nach Steuern

Verfügbare

Direkte Steuern



Private Haushalte

Staatseingriffe durch Steuern

Konkurrenz-Preissystem

Unternehmen

Faktorangebot

Faktormärkte

Faktoreinkommen

Faktorpreise vor Steuern

Faktorsteuern

Faktorpreise nach Steuern

Verfügbare Einkommen

Direkte Steuern und Transfers

Faktornachfrage und Güterangebot (Kostenminimierung bzw. Gewinnmaximierung)

Ab-Werk-Preise

Outputsteuern abzgl. Subventionen

Herstellungs-

Wissensbasierte Modellierung

Einführung

Module und Subsysteme

Grundelemente

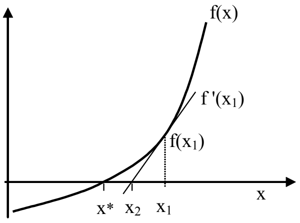
Nichtlineare Systeme

Gleichgewichtssysteme

Parameterschätzung

Parameterschätzung

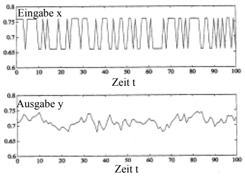
- Newton-Raphson Methode



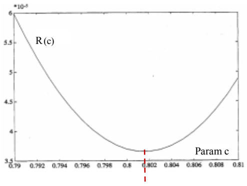
Parameterschätzung

- Beispiel: Parameterschätzung eines Prozesses

Eingabe/Ausgabe bei c=0,8



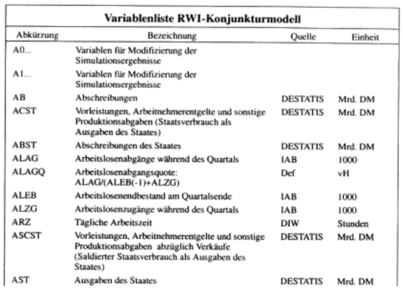
Schätzung von *c* mit Zielfunktion



c* = 0,8015

Beispiel RWI-Konjunkturmodell

- Variablen des Modells (10 von ca. 130)

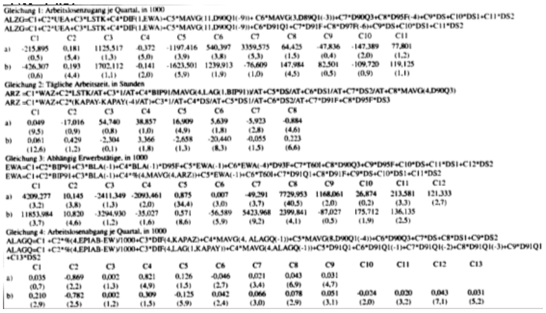


Variablenliste RWI-Konjunkturmodell

Abkürzung	Bezeichnung	Quelle	Einheit
A0...	Variablen für Modifizierung der Simulationsergebnisse		
A1...	Variablen für Modifizierung der Simulationsergebnisse		
AB	Abschreibungen	DESTATIS	Mrd. DM
ACST	Vorleistungen, Arbeitnehmerentgelte und sonstige Produktionsabgaben (Staatsverbrauch als Ausgaben des Staates)	DESTATIS	Mrd. DM
ABST	Abschreibungen des Staates	DESTATIS	Mrd. DM
ALAG	Arbeitslosenabgänge während des Quartals	IAB	1000
ALAGQ	Arbeitslosenabgangsquote: ALAG/(ALEB(-1)+ALZG)	Def	vH
ALEB	Arbeitslosenendbestand am Quartalsende	IAB	1000
ALZG	Arbeitslosenzugänge während des Quartals	IAB	1000
ARZ	Tägliche Arbeitszeit	DIW	Stunden
ASCST	Vorleistungen, Arbeitnehmerentgelte und sonstige Produktionsabgaben abzüglich Verkäufe (Saldierter Staatsverbrauch als Ausgaben des Staates)	DESTATIS	Mrd. DM
AST	Ausgaben des Staates	DESTATIS	Mrd. DM

Beispiel RWI-Konjunkturmodell

- Gleichungen des Modells (4 von ca. 46) a) Modell48



Gleichung 1: Arbeitslosenzugang je Quartal, in 1000

ALZG=C1+C2*UEA+C3*LSTK+C4*DIF(1,EWA)+C5*MAVG(11,D90Q1(-9))+ C6*MAVG(3,D89Q1(-3))+C7*D90Q3+C8*D95F(-4)+C9*DS+C10*DS1+C11*DS2

ALZG=C1+C2*UEA+C3*LSTK+C4*DIF(1,EWA)+C5*MAVG(11,D90Q1(-9))+C6*D91Q1+C7*D91F+C8*D97F(-6)+C9*DS+C10*DS1+C11*DS2

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11
a)	-215,895	0,181	1125,517	-0,372	-1197,416	540,397	3359,575	64,425	-47,836	-147,389	77,801
	(0,5)	(5,4)	(1,3)	(5,0)	(3,9)	(3,8)	(5,3)	(1,5)	(0,4)	(2,0)	(1,2)
b)	-426,307	0,193	1702,112	-0,141	-1623,501	1239,913	-76,609	147,984	82,501	-109,720	119,125
	(0,6)	(4,4)	(1,1)	(2,0)	(5,9)	(1,9)	(1,0)	(4,5)	(0,5)	(0,9)	(1,1)

Gleichung 2: Tägliche Arbeitszeit, in Stunden

ARZ =C1*WAZ+C2*LSTK/AT+C3*1/AT+C4*BIP91/MAVG(4,LAG(1,BIP91))/AT+C5*DS/AT+C6*DS1/AT+C7*DS2/AT+C8*MAVG(4,D90Q3)

ARZ =C1*WAZ+C2*(KAPAY-KAPAY(-4)/AT)+C3*1/AT+C4*DS/AT+C5*DS1/AT+C6*DS2/AT+C7*D91F+C8*D95F*DS3

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
a)	0,049	-17,016	54,740	38,857	16,909	5,639	-5,923	-0,884
	(9,5)	(0,9)	(0,8)	(1,0)	(4,9)	(1,8)	(2,8)	(4,6)
b)	0,061	0,429	-2,304	3,366	-2,658	-20,440	-0,055	0,223
	(12,6)	(1,2)	(0,1)	(1,8)	(1,3)	(8,3)	(1,5)	(6,6)

Gleichung 3: Abhängig Erwerbstätige, in 1000

EWA=C1+C2*BIP91+C3*BLA(-1)+C4*BLA(-1)*D95F+C5*EWA(-1)+C6*EWA(-4)*D93F+C7*T60I+C8*D90Q3+C9*D95F+C10*DS+C11*DS1+C12*DS2

EWA=C1+C2*BIP91+C3*BLA(-1)+C4*%(4,MAVG(4,ARZ))+C5*EWA(-1)+C6*T60I+C7*D91Q1+C8*D91F+C9*DS+C10*DS1+C11*DS2

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12
a)	4209,277	10,145	-2411,349	-2093,461	0,875	0,007	-49,291	7729,953	1168,061	26,874	213,581	121,333
	(3,2)	(3,8)	(1,3)	(2,0)	(34,4)	(3,0)	(3,7)	(40,5)	(2,0)	(0,2)	(3,3)	(2,7)
b)	11853,984	10,820	-3294,930	-35,027	0,571	-56,589	5423,968	2399,841	-87,027	175,712	136,135	
	(3,7)	(4,6)	(1,2)	(1,6)	(8,6)	(5,9)	(9,2)	(4,1)	(0,5)	(1,9)	(2,5)	

Gleichung 4: Arbeitslosenabgang je Quartal, in 1000

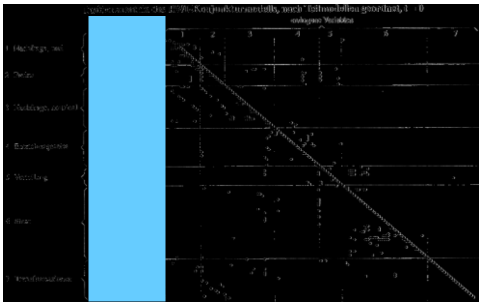
ALAGQ=C1 +C2*%(4,EPIAB-EW)/1000+C3*DIF(4,KAPAZ)+C4*MAVG(4, ALAGQ(-1))+C5*MAVG(8,D90Q1(-4))+C6*D90Q3+C7*DS+C8*DS1+C9*DS2

ALAGQ=C1 +C2*%(4,EPIAB-EW)/1000+C3*DIF(4,LAG(1,KAPAY))+C4*MAVG(4,ALAGQ(-1))+C5*D91Q1+C6*D91Q1(-1)+C7*D91Q1(-2)+C8*D91Q1(-3)+C9*D91Q1 +C13*DS2

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13
a)	0,035	-0,869	0,002	0,821	0,126	-0,046	0,021	0,043	0,031				
	(0,7)	(2,2)	(1,3)	(4,9)	(1,5)	(2,7)	(3,4)	(6,9)	(4,7)				
b)	0,210	-0,782	0,002	0,309	-0,125	0,042	0,066	0,078	0,051	-0,024	0,020	0,043	0,031
	(2,9)	(2,5)	(1,2)	(1,5)	(5,9)	(2,4)	(3,0)	(2,9)	(3,1)	(2,0)	(3,2)	(7,1)	(5,2)

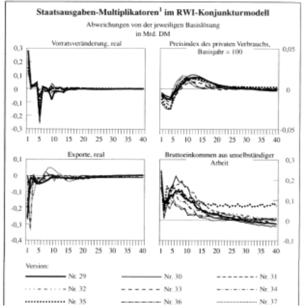
Beispiel RWI-Konjunkturmodell

- Gleichungen des Modells



Beispiel RWI-Konjunkturmodell

- Verbesserung des Modells

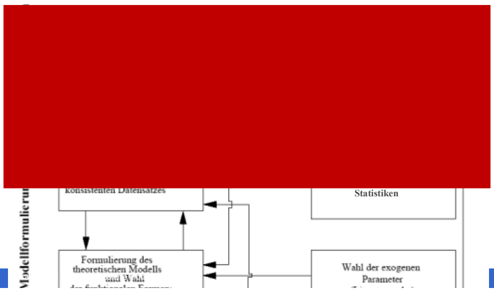


Parameterschätzung

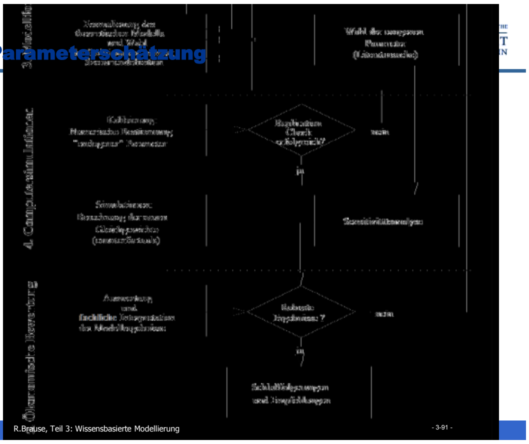
- Schritte der Parameterschätzung
  bei Gleichgewichtssystemen

Parameterschätzung

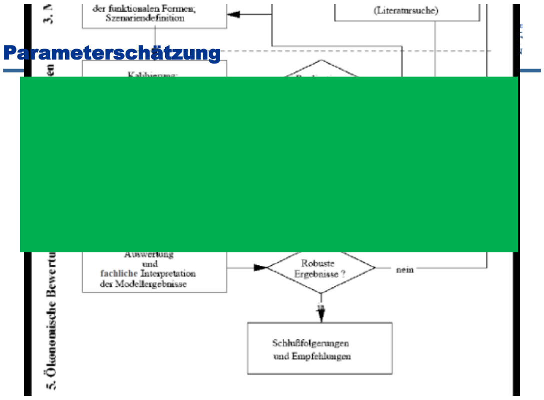
- Schritte der Parameterschätzung
  bei Gleichgewichtssystemen



Parameterschätzung

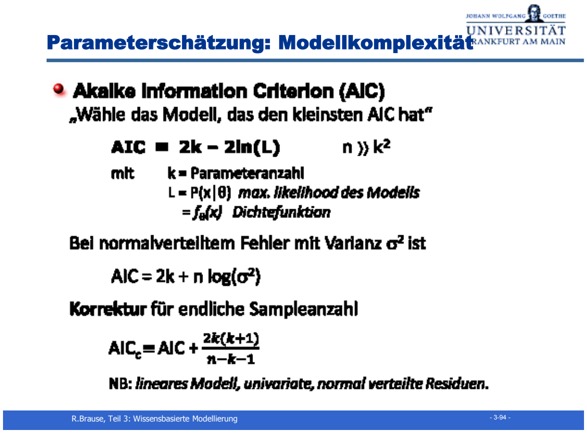


Parameterschätzung



Parameterschätzung

- **Schätzungsproblem: Modellkomplexität**
  - Genauigkeit vs. Einfachheit
  - Overfitting vs. Generalisierung
- **2 Modelle, gleiche Parameterzahl k.**
  - **Frage**: Welches davon nehmen?
  - **Antwort**: Dasjenige, das **einfacher** ist (weniger Fehler bei weiteren Samples).
- **Kriterien für „Einfachheit“ (Modellkomplexität)**
  - Akaike information criterion **AIC** = 2k – 2ln(L) *(Akaike 1974)*
  - χ^2 – Test (Chi-Quadrat-Test) *= reduziert AIC zu 2k+ χ^2*
  - Leave-one-out cross-validation *= AIC asymptotisch bei lin. Regression*
  - Mallows's C_p *= AIC bei Gauss'scher lin. Regression*
  - Bayesian information criterion **BIC** = log(*n*)k – 2ln(L)



Parameterschätzung: Modellkomplexität

- **Akaike Information Criterion (AIC)**

„Wähle das Modell, das den kleinsten AIC hat“

$$\mathbf{AIC = 2k - 2\ln(L)} \qquad n \gg k^2$$

mit k = Parameteranzahl
L = P(x|θ) *max. likelihood des Modells*
= $f_\theta(x)$ *Dichtefunktion*

Bei normalverteiltem Fehler mit Varianz σ^2 ist

$$\mathrm{AIC} = 2k + n \log(\sigma^2)$$

Korrektur für endliche Sampleanzahl

$$\mathrm{AIC_c} = \mathrm{AIC} + \frac{2k(k+1)}{n-k-1}$$

NB: *lineares Modell, univariate, normal verteilte Residuen.*