

Adaptive Modellierung und Simulation

Kapitel 4: Hierarchische Modellierung

Rüdiger Brause

Hierarchische Modellierung

Einführung

Aggregation

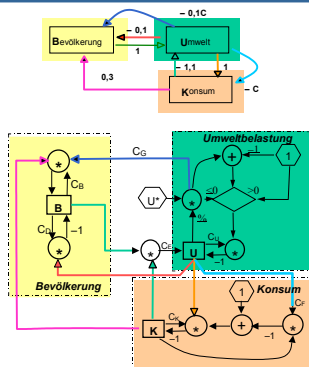
Multi-Level-Modelling

Kausale Strukturanalyse

Konstruierte Hierarchie: Mini-Weltmodell

Verknüpfungen

- Umweltschäden erhöhen Sterberate
- Umweltschäden erzwingen Geburtenkontrolle
- Bevölkerungsgröße und Konsum bewirken Umweltschäden
- Umweltbelastung provoziert med. Konsum
- Konsum erhöht Lebenserwartung
- Mehr Umweltverschmutzung möglich



Hierarchische Modellierung

Einführung

Aggregation

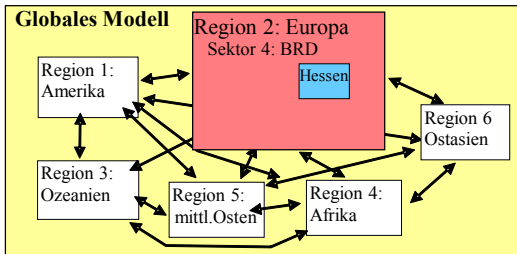
Multi-Level-Modelling

Kausale Strukturanalyse

Hierarchie durch Aggregation

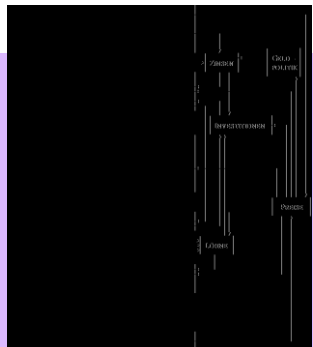
Beispiel INFORM-Weltmodell

- Historisch gewachsen
- Unterschiedliche Detaillierungsgrade



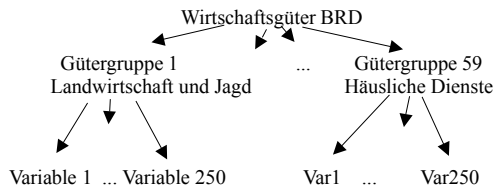
Untergliederung in Subsystemen

Beispiel INFORGE-Modell



Untergliederung in Subsysteme

Beispiel INFORGE-Modell: Gütergruppen



R.Brause, Kap. 4; Hierarch. Modellierung

4-7

Subsystem-Vernetzung

Beispiel Input-Output-Tabelle

Produkt	Eing. v. Land u. Ausland	Eing. v. Erden	Eing. v. Energie	Eing. v. Wasser	Eing. v. Erden	Eing. v. Energie	Eing. v. Wasser	Input der Produktion, Beschäft.												
								1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
1 Ertrags- der Land- u. Forstwirtschaft, Fischerei	1,4	0,0	0,5	-	0,0	2,1	34,0	0,0	1,0	0,0										
2 Bergbauergüter, Steine und Erden	1,4	0,7	31,7	7,5	4,9	3,3	2,5	2,6	7,6	2,6										
3 Energie und Wärme	4,3	1,7	64,1	7,9	30,8	11,5	3,5	35,0	12,5	2,7										
4 Eisen, Vorkorn, bearbeitete Steine und Erden	0,4	1,8	4,7	47,3	0,3	2,7	1,5	12,1	2,4	0,0										
5 Maschinen, Fahrzeuge, Dreh-Geräte, e-lekt. Geräte	1,1	4,3	4,1	5,3	176,3	2,1	1,0	12,9	14,1	3,4										
6 Holz, Holzwerkstoffe, Leder und Lederwaren, Erz	0,3	0,4	4,7	2,4	10,9	47,7	3,4	0,7	12,1	7,5										
7 Holz- und Holzwerkstoffe, Textilien u. d. Textilgewerbe, Leder- und Lederwaren, Eisenwaren	4,9	0,9	2,7	0,6	0,1	0,9	19,7	0,9	13,9	0,9										
8 Maschinen, Holz- und Holzwerkstoffe, Textilien u. d. Textilgewerbe, Leder- und Lederwaren, Eisenwaren	0,4	2,1	1,9	1,9	1,9	0,2	0,6	4,7	3,3	21,8										
9 Handwerkszeug, Verkehrsmittel und Maschinen	2,9	2,1	13,6	11,4	37,5	12,9	12,6	13,9	113,0	13,5										
10 Öl, der Kohlenst., u. Verarbeitungen, Öl, des Metallgewerbes und sonstiger unternehmenseigener Ök.	4,5	10,9	29,7	19,2	0,2	19,8	14,6	33,2	89,9	292,2										
11 Öl, des Kohlenst., u. Verarbeitungen, Öl, des Metallgewerbes und sonstiger unternehmenseigener Ök.	1,5	0,4	1,6	0,7	0,3	0,9	0,8	0,5	4,8	5,8										
12 Öl, des Kohlenst., u. Verarbeitungen, Öl, des Metallgewerbes und sonstiger unternehmenseigener Ök.	0,3	4,1	1,9	0,7	1,7	3,8	1,9	1,1	0,1	16,2										
13 Verarbeitungen der Produktionsbereiche	25,3	36,7	160,3	94,3	306,9	198,8	36,2	124,8	204,8	230,9										

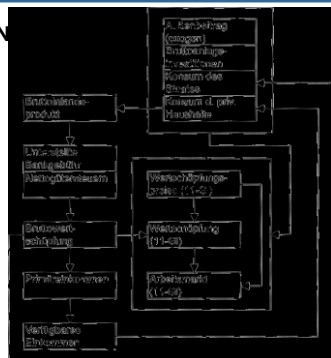
R.Brause, Kap. 4; Hierarch. Modellierung

4-8

Untergliederung in Subsysteme

Beispiel Modell LÄN

Modell eines Bundeslandes



R.Brause, Kap. 4; Hierarch. Modellierung

4-9

• Vernetzung von 16 LÄNDER mit INFORGE

Länderdaten der Wirtschaftsbereiche

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
r ₁																	1
																	2
																	3
																	4
																	5
																	6
																	7
																	8
																	9
																	10
																	11

s_j

INFORGE-Daten der Wirtschaftsbereiche

Abstimmung durch biproportionale Skalierung RAS

RAS-Prozedur

- **Gegeben:** Zu erzielende Zeilensummen r_i^* , Spaltensummen s_j^* , initiale Matrix $A = (A_{ij})$
- **Schritt 1:** Bilde $r_i^{(0)}$, Skalieren Zeilen i $A_{ij}(1) = A_{ij}(0) r_i^* / r_i^{(0)}$
- **Schritt 2:** Bilde $s_j^{(0)}$, Skalieren Spalten j $A_{ij}(2) = A_{ij}(1) s_j^* / s_j^{(1)}$
- **Wiederhole** Schritt 1+2 bis zur Konvergenz von A
- **Formulierbar** als Matrixmultiplikation mit Diagonalmatrizen $A(k+1) = R(k) A(k) S(k+1)$

Hierarchische Modellierung

Einführung

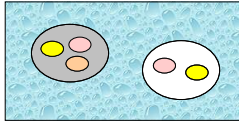
Aggregation

Multi-Level-Modelling

Kausale Strukturanalyse

Multilevel-Modelle

Gruppenzugehörigkeit und Abhängigkeit

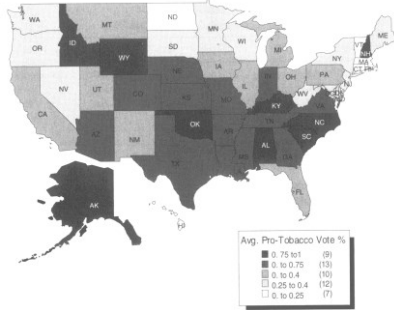


Ebene 1: $y_{ij} = a_j + b_j x_{ij} + \varepsilon_{ij}$

Ebene 2: $a_j = \alpha_0 + \alpha_1 w_j + u_j$
 $b_j = \beta_0 + \beta_1 w_j + v_j$

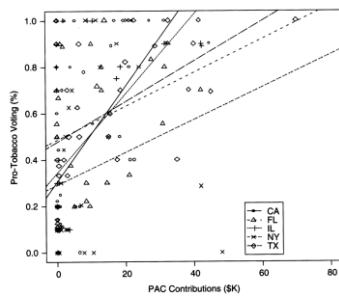
Multilevel-Modelle

Beispiel Einfluss der Tabakindustrie in USA 1997-2000



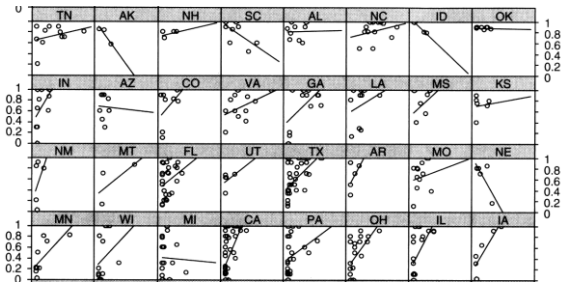
Multilevel-Modelle

Beispiel Einfluss der Tabakindustrie in USA 1997-2000



Multilevel-Modelle

• **Beispiel** Einfluss der Tabakindustrie in USA 1997-2000



Multilevel-Modelle

• **Beispiel** Einfluss der Tabakindustrie in USA 1997-2000

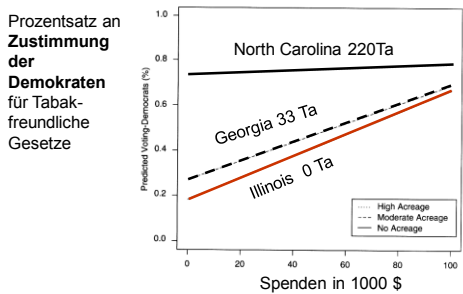
Vergleich der Modelle

Angepasste

	Model 1		Model 2		Model 3	
	Coef.	SE	T-ratio	p		
Pol. Affinity (β _{0j})						
Acres (β _{1j})	0.00	0.043	0.96	.000		
Acres ² (β _{2j})						
Time Policy Change (β _{3j})	-0.001	0.0028	-21.21	.000		
Time (β _{4j})						
Mid. Tobacco Sales (β _{5j})	0.00010	0.00001	11.33	.000		
Mid. Sales (β _{6j})						

Multilevel-Modelle

• **Ergebnis** Einfluss der Tabakindustrie in USA



Hierarchische Modellierung

Einführung

Aggregation

Multi-Level-Modelling

Kausale Strukturanalyse

Strukturanalyse

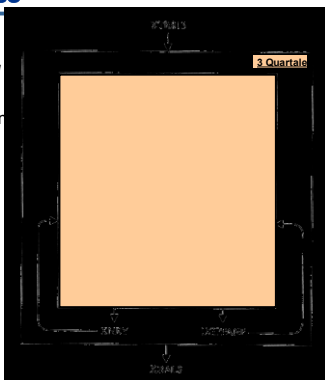
Kausale Strukturanalyse - Wozu ?

- Ein klares **Bild der kausalen Struktur** kann bei der Konstruktion helfen, Modellierungsfehler zu vermeiden.
- Mit Hilfe der klaren Strukturen kann der Anwender leichter **das Modell verstehen**, d.h. seine Ziele und Annahmen zu erfassen und seine Hauptarchitektur zu verfolgen.
- Mit der Kenntnis der wichtigsten Ziele und Annahmen kann man auch leichter die **theoretischen Eigenschaften** und damit das Anwendungsgebiet des Modells abschätzen. Auch die Ergebnisse lassen sich so leichter interpretieren.
- Durch die Zerlegung des Modells in Mengen von zusammenhängenden Variablen lassen sich leichter die **Punkte** im Modell **lokalisieren**, die für eine bestimmte Analyse ausschlaggebend sind, unabhängig vom wesentlich größeren Modell, in das sie eingebettet sind.

Strukturanalyse

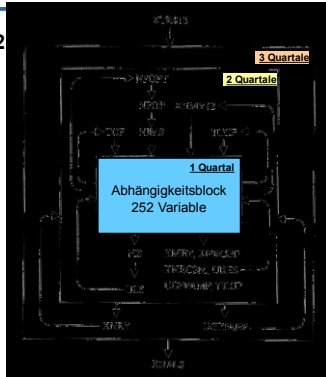
Beispiel RDX2

Kanad. Finanzmodell
271 int. Variablen
326 externe Variablen
1500 zeitversch. Var.
zu 19 Zeitpunkten



Strukturanalyse

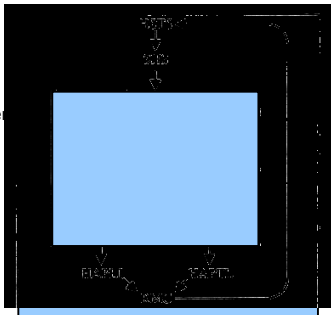
Beispiel RDX2



Strukturanalyse

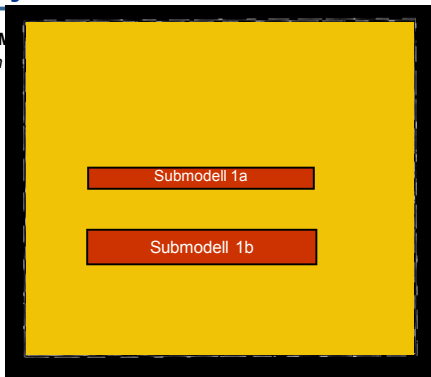
Extrem komplexes Subsystem Abhängigkeitsblock

252 Variable
975 Kausalbeziehungen
(ohne verzög. Var.)
Millionen elementarer
Kreise



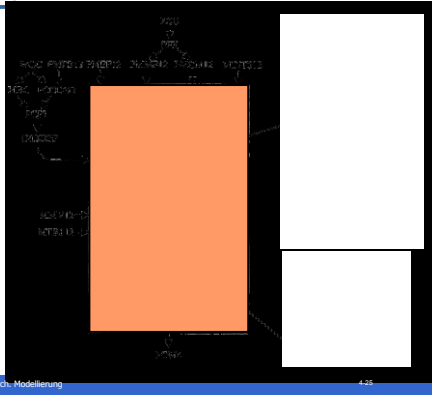
Strukturanalyse

Submodell SM Minimaler Graph



Strukturanalyse

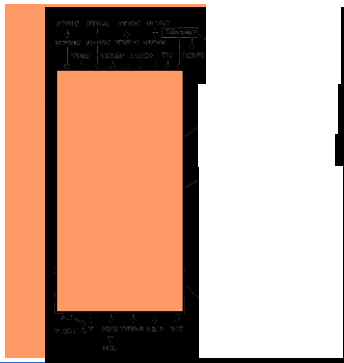
Submodell SM1a



Strukturanalyse

Submodell SM1b

Kapitalquellen und Kapitalsenken (Investitionen)



Systemgraph und Wirkungsgraph

Allgemeines System
 $z(t+1) = F(z(t), x(t), t)$

Lineares System
 $z(t+1) = (I+A)z(t) + Bx(t)$

Nicht-lineares System
Entwicklung von $F(\cdot)$ in Taylor-Reihe, Nutzung der linearen Terme

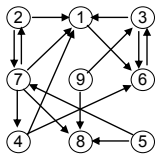
$$A = (A_{ij}) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial z_j} \right), \quad B = (B_{ij}) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)$$

Zusammenfassung mit $w = (z, x)^T$ zur Adjazenzmatrix D

$$w(t+1) = \begin{pmatrix} z(t+1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I+A & B \\ 0 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = D w(t)$$

Beispiel

$Z_1 = F_1(Z_2, Z_3, Z_4, Z_7)$
 $Z_2 = F_2(Z_7)$
 $Z_3 = F_3(Z_6, Z_9)$
 $Z_4 = F_4(Z_7)$
 $Z_6 = F_6(Z_1, Z_3, Z_4)$
 $Z_7 = F_7(Z_2, Z_5)$
 $Z_8 = F_8(Z_5, Z_7, Z_9)$



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	1	0	0
3	1	0	0	0	0	1	0	0	0
4	1	0	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	1	1	0
6	0	0	1	0	0	0	0	0	0
7	1	1	0	1	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	1	0	0	0	0	0	1

Kausale Graphenanalyse

- Ermittle Blöcke**
Finde streng zusammenhängende Komponenten
- Formuliere Kausalketten**
Adjazenzmatrix → Erreichbarkeitsmatrix
- Reduziere Strukturen**
Ermittle indirekten Einfluss
- Ermittle minimale Struktur**
Lasse alle redundanten Einflüsse weg
- Ermittle essentielle Variablen in Blöcken**
Bilde bipartite Graphen
- Modelliere Zeitabhängigkeit**
Bilde multiple, zusammenhängende Kopien
- Reduziere Komplexität**

Definitionen

- **Graph** $G = (V, E)$ mit Knotenmenge V , Kantenmenge E
- **Adjazenzmatrix** $A = (A_{ij})$ mit $A_{ij} = 1$ bei $E_{ij} \in E$, sonst = 0
- **Weg** Knotenfolge V_1, \dots, V_n mit ex. Kanten E_{ij}, ij aus $1, \dots, n$
- **Zyklus** Weg mit $V_1 = V_n$
- **Pfad** Weg mit ungleichen Knoten $V_i \neq V_j, ij$ aus $1, \dots, n$
- **Kreis** Pfad mit $V_1 = V_n$

- **Streng zusammenhängend**
 $G_s \subset G$ ist Subgraph mit Knoten V_i, V_j
 G_s ist „streng zusammenhängend“ \Leftrightarrow
 WENN Pfad ex. von V_i zu V_j , DANN auch von V_j zu V_i

1. Ermittle Blöcke

• **Tue dies für alle Knoten V_0 aus V :**

- **Start** an einem beliebigen Knoten $V_0 \in V$
- **Berechne Menge R** aller erreichbaren Knoten
 $R(V_0) = \{ V_i \mid \text{ex. Pfad von } V_0 \text{ zu } V_i \}$
- **Berechne Menge Q** aller erreichenden Knoten
 $Q(V_0) = \{ V_i \mid \text{ex. Pfad von } V_i \text{ zu } V_0 \}$
- **Berechne Schnittmenge** $R(V_0) \cap Q(V_0)$
Alle Knoten, zu denen ein Pfad hin und zurück ex.
- **Ersetze die Schnittmenge** jeweils durch einen einzigen Block
(symbolischen Knoten): Knoten \rightarrow Blöcke

2. Formuliere Kausalketten

• **Ordne die Blöcke in Ebenen an**

- Ebene 0: Alle Blöcke, in denen keine Kanten münden (Input)
- Ebene 1: Alle Blöcke, die direkt, aber nicht indirekt von Ebene 0 erreicht werden.
-
- Ebene i: Alle Blöcke, die direkt, aber nicht indirekt von Ebenen 0..i-1 erreicht werden.

Umordnung der Blöcke in Adjazenzmatrix gemäß der Reihenfolge der Ebenen \Rightarrow Nur noch Einträge $\neq 0$ oberhalb der Hauptdiagonale
A = „Obere Dreiecksmatrix“

3. Reduziere Strukturen

• **DEF Erreichbarkeitsmatrix**

$C_{ij} = 1$, wenn Pfad = 1 ex. von V_i nach V_j
 $C_{ij} = i$, wenn Pfad > 1 ex. von V_i nach V_j
 $C_{ij} = 0$, sonst

• **Ergänze die indirekten Einflüsse von Block i auf j**

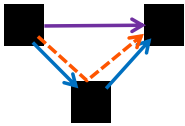
- **Berechne Menge R** aller von V_i beeinflussten Blöcke V_k
 $R(V_i) = V_i \cup \{ V_k \mid C_{ik} \neq 0 \}$
- **Berechne Menge Q** aller V_j beeinflussenden Blöcke V_k
 $Q(V_j) = V_j \cup \{ V_k \mid C_{kj} \neq 0 \}$
- **Berechne Schnittmenge** $R(V_i) \cap Q(V_j)$
Alle Blöcke, die von V_i beeinflusst werden und V_j beeinflussen

Untermodell für Einflüsse von Block i auf j

4. Ermittle minimale Struktur

• Unterscheide zwischen **Basis**verbindungen, **direkten** und **indirekten** Verbindungen

$C_{ij} = b$ notwendig für Kausalität
 $C_{ij} = d$ direkte Verbindung, durch *i* ersetzbar
 $C_{ij} = i$ indirekt über andere Blöcke erreichbar



$C_{12} = b$
 $C_{13} = d$ oder i
 $C_{23} = b$

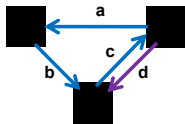
• Verbindungen **d** können weggelassen werden!

5. Ermittle essentielle Variablen

• Finde verantwortliche Variablen für Kreise

- Essentielle **Rückkopplungsknotenmenge**
Knoten, mind. 1 mal in jedem Kreis
- Essentielle **Rückkopplungskantenmenge**
Kanten, mind. 1 mal in jedem Kreis

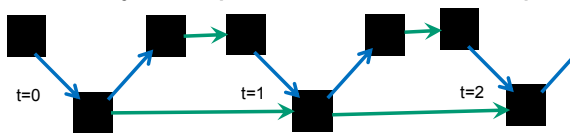
Beispiel



$c1: 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$
 $c2: 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2$
 Rückkoppl.knotenmenge: {2,3}
 Rückkoppl.kantenmenge: {c}

6. Modellere Zeitabhängigkeit

• Setze für **jeden Zeitpunkt**, der beeinflusst, **einen Graph**



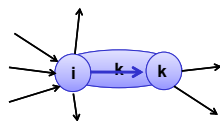
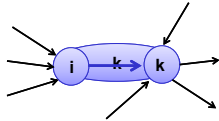
- **Verbinde die Graphen** mit den Einflüssen
- Neue Erreichbarkeitsmatrix = zusammengesetzte obere Dreiecksmatrix
- **Problem:** Divergenz und Ausbreitung des Einflusses auf den Gesamtgraphen in wenigen Zeitschritten

7. Reduziere Komplexität

Variablenzahl verringern

Variablensubstitution:

30-60% Größenreduktion

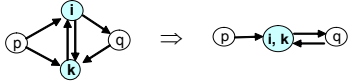


i hat nur **einen** Einfluss

k wird nur von **einem** beeinflusst

Voraussetzung der Substitution: Keine Schleife zwischen i und k ;
 i ist kein Startknoten (Eingabe), k ist kein Endknoten

Verschmelzung rückgekoppelter Variabler



Minimalgraph

- Zeichne nur die **Basiskanten**
- Zeichne Kanten zwischen **Submodellen** nur einmal
- Streiche** alle essentiellen Rückkopplungskanten
- Berechne** den **minimalen Graphen** der resultierenden Ebenenstruktur
- Addiere** nun aus der Menge der essentiellen Rückkopplungskanten die Kanten, die **Basiskanten** sind, wieder zum Graphen.
